

3. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

Dokážeme dle definice. Zvolme tedy $K > 0$ libovolné. Necht n_0 je nejmenší přirozené číslo, které je větší, než $\sqrt{K}$. Pak platí, že $n_0^2 > K$. Pak $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: n^2 > K$. Tím jsme ověřili definici.

Příklad 1 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Z definice ukážeme, že výsledkem je 0. Zřejmě $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$. Chceme tedy ukázat, že $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$.

Jelikož je funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ klesající, stačí naléznout jedno n , které splňuje danou nerovnost s ε .

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}} &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon^2 \\ \frac{1}{\varepsilon^2} &< n\end{aligned}$$

Takové n existuje dle Archimédovy vlastnosti.

Příklad 1 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty$

Zvolme $K > 0$ lib. Chceme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ t.ž. $e^{n_0} > K$. Pak $n > n_0 \implies e^n > e^{n_0} > K$.

Existence n_0 : je potřeba, aby: $n_0 > \ln K$, což lze dle Archimédovy vlastnosti.

Příklad 1 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$

Zřejmě $e^{-n} \geq 0$. Stačí tedy nalézt $n_0 \in \mathbb{N}: e^{-n} < \varepsilon$ pro lib. $\varepsilon > 0$, neb fce $x \mapsto e^{-x}$ je klesající.

$$\begin{aligned}e^{-n} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< e^n \\ \ln \frac{1}{\varepsilon} &< n\end{aligned}$$

Opět z Archimédovy vlastnosti existence takového n plyne.

Příklad 1 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$

Zvol. $K > 0$ lib. Pak z monotonie fce $x \mapsto \ln x$ stačí nalézt n t.ž. $\ln n > K$. Stačí vzít takové n , že $n > e^K$.

Příklad 1 (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \infty$

Zvolme $K > 0$ lib. Opět z monotonie stačí, aby $2^n > K$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Dle Archimedovy vlastnosti existuje n t.ž. $n > \log_2 K$, což je dostačující.

Příklad 1 (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$

Připomenutí: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ (faktoriál).

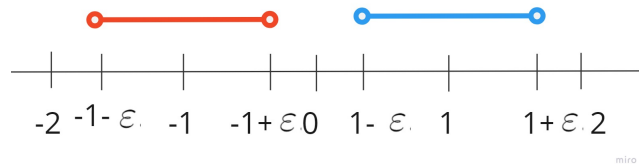
Posloupnost je zřejmě rostoucí a není shora omezená. Snadno lze ověřit z definice, že limita je nekonečno.

Příklad 1 (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n \text{ liché} \\ 1, & n \text{ sudé} \end{cases}$$

Posloupnost je $-1, 1, -1, 1, \dots$. Tato posl. nemá limitu - nepřibližuje se totiž žádnému číslu. Že limita zadané posl. neexistuje dokážeme z definice - sporem.

Pro spor tedy předpokládejme, že $A \in \mathbb{R}$ je limitou dané posl. Zvolme $\varepsilon \in (0, 1)$ lib. Z definice limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ t.ž. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |(-1)^n - A| < \varepsilon$. Pak speciálně platí, že $|-1 - A| < \varepsilon < 1$ a $|1 - A| < \varepsilon < 1$. Lidově řečeno: A se od -1 liší o méně než ε a A se od 1 liší o méně než ε . Jelikož je ale $\varepsilon < 1$, tak tato situace nemůže nastat - viz obrázek níže.



Posloupnost je navíc omezená, takže nekonverguje ani k $-\infty, \infty$.

Příklad 1 (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n$

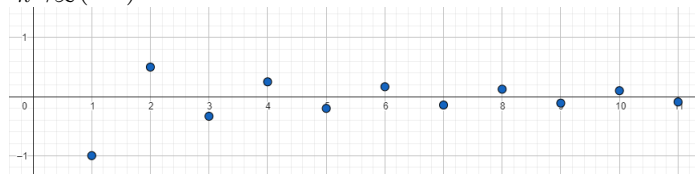
Začátek posl.: $-1, 2, -3, 4, \dots$

Jelikož posl. není omezená, nemůže mít za limitu reálné číslo - dle věty 2.2.

Zřejmě jde část posl. do ∞ a část do $-\infty$. Lze tedy snadno dokázat, že posl. nemá limitu.

Příklad 1 (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Intuitivně víme, že $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ a přenásobením $(-1)^n$ se nám jen mění znaménko. Tedy náš tip je, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$.



Dokažme to z definice. Zvol. $\varepsilon > 0$ lib. Jelikož $n \mapsto \frac{1}{n}$ je klesající a zdola omezená nulou, existuje $n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Pak $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \left|(-1)^n \frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

Příklad 1 (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi n) \cdot \sqrt{n}$

$$\cos \pi n = \begin{cases} -1, & n \text{ liché} \\ 1, & n \text{ sudé} \end{cases}$$

Platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$ (lze ukázat z definice). Pak lze ukázat, že naše limita nekonverguje.

Příklad 2 (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^{-n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 0$$

Zvol. $\varepsilon > 0$. Nal. $n_0 \in \mathbb{N}$: $\left|(-1)^{n_0} \frac{1}{2^{n_0}}\right| < \varepsilon$.

$$\left|(-1)^{n_0} \frac{1}{2^{n_0}}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^{n_0}$$

$$\log_2 \frac{1}{\varepsilon} < n_0$$

Dle Archimédovy vl. takové n_0 existuje a zřejmě $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$: $\left|(-1)^n \frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon$.

Příklad 2 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$

Víme: $(-1)^n$ diverguje a $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Z toho dostáváme podezření, že $(-1)^n + \frac{1}{n}$ diverguje. Konkrétně to plyne z věty 2.3.

Příklad 2 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi)$

$$\cos(\pi n) = \begin{cases} -1, & n \text{ liché} \\ 1, & n \text{ sudé} \end{cases}$$

Posl. proto diverguje (analogicky jako v 1 (h)).

Příklad 2 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi)$

Zřejmě $\sin(n\pi) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Proto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0$.

Příklad 3 (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 20 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \stackrel{1 \text{ (b)}}{=} 20 \cdot 0 = 0$$

Příklad 3 (b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -n^8 + 2n^3 - 4 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left(-1 + \frac{2}{n^5} - \frac{4}{n^8}\right) \stackrel{\text{VoAL}}{=} \infty \cdot (-1 - 0 - 0) = -\infty$$

Příklad 3 (c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right) \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \stackrel{\text{VoAL}}{=} \infty \cdot (1 - 0) = \infty$$

Příklad 3 (d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}\right)}{n^3 \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^3}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0 \cdot \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0} = 0$$

Příklad 3 (e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(2 + \frac{6}{n^2}\right)}{n^3 \left(1 - \frac{7}{n^2} + \frac{7}{n^3}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{n^2}}{1 - \frac{7}{n^2} + \frac{7}{n^3}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{2 + 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Příklad 3 (f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(2 + \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^5}\right)}{n^5 \left(1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^5}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^5}}{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^5}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Příklad 3 (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n}$

$\cos(n)$ je zdola i shora omezená ($\in [-1, 1]$). Dále $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Jde tedy o typ omezená·0. Dle věty o limitě typu 0· omezená je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

Příklad 3 (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan n + n}{n}$

$$\frac{\arctan n + n}{n} = \frac{\arctan n}{n} + 1$$

Fce $\arctan$ je om. (hodnotami $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$). Dále $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Jde tedy o typ omezená·0. Tedy je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan n}{n} = 0$.

Z toho dostáváme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan n + n}{n} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 1 + 0$.

Příklad 3 (i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2n} - 3 \cdot 3^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left(1 - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = \stackrel{\text{VoAL}}{=} \infty \cdot (1 - 3 \cdot 0) = \infty$$

Že $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ lze ukázat z definice. Později to však bude plynout ze známých limit.

Alternativně:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2n} - 3 \cdot 3^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^{n+1}).$$

Lze ukázat, že od určitého n_0 platí, že $4^n - 3^{n+1} > 0$. Víme (ze SŠ), že 4^n roste rychleji, než 3^{n+1} . To nám dává důvod si myslet, že by limitou mohlo být nekonečno. Uakžem, že tomu tak skutečně je.

Zvolme $r \in \mathbb{R}$ lib.

- $r \leq 0$ Stačí ukázat, že $\exists n_0 \forall n \geq n_0: 4^n - 3^{n+1} > 0$.

$$\begin{aligned} 4^n &> 3^{n+1} \\ n &> (n+1) \log_4 3 \\ n(1 - \log_4 3) &> \log_4 3 \\ n &> \frac{\log_4 3}{1 - \log_4 3} \end{aligned}$$

Při dělení výrazem $(1 - \log_4 3)$ jsme neotáčeli znaménko, neb jde o kladný výraz.

Dle Archimedovy vl. existuje $n_0 \in \mathbb{N}: n_0 > \frac{\log_4 3}{1 - \log_4 3}$.

- $r > 0$

Chci: $\exists n_0 \forall n \geq n_0: 4^n - 3^{n+1} > r$.

$$\begin{aligned} 4^n &> 3^{n+1} + r \\ 4^n &> 3^n \left(3 + \frac{r}{3^n} \right) \\ n &> n \log_4 3 + \log_4 \left(3 + \frac{r}{3^n} \right) \\ n &> \frac{\log_4 \left(3 + \frac{r}{3^n} \right)}{1 - \log_4 3} \end{aligned}$$

Výraz napravo je zřejmě shora om. Dle Archimédovy vl. tedy kýžené n_0 existuje.

Příklad 3 (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$

Intuitivně: 2^n roste pomaleji, než $n!$. Proto tipujeme, že limita bude nula. Ověříme to z definice.

Zřejmě je zlomek nezáporný.

Nejdříve ukážeme, že $2^n < n!$ pro dostatečně velká n .

- $n = 4$: $2^4 = 16 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $n \rightarrow n+1$: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \stackrel{\text{IP}}{<} 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!$

Zjevně pro $n \geq 4$ platí, že $2^n < n!$, respektive $\frac{2^n}{n!} < 1$.

Nyní ukážeme, že $\forall \varepsilon \in (0, 1) \exists n_0 \forall n \geq n_0: \frac{2^n}{n!} < \varepsilon$.

$$2^n < n! \cdot \varepsilon$$

Napravo i nalevo mám součin n faktorů. Vlevo je každým faktorem číslo 2. Vpravo máme faktory $2, 3, \dots, n-1, n, \varepsilon$. Faktory $2, 3, \dots, n-1$ jsou větší, nebo rovny číslu 2. Tedy $2^{n-2} \leq (n-1)!$. Zbývá tedy zařídit, aby $n\varepsilon > 2 \cdot 2$. Tedy aby $n > \frac{4}{\varepsilon}$, což lze zařídit dle Archimedovy vl. Tedy pro dostatečně velké n platí, že $\frac{2^n}{n!} < \varepsilon$.

Příklad 3 (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$

Podobně jako v 3 (j) lze ukázat, že limitou je nula.

Příklad 3 (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$

Připomeňme si vzorec: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\text{Pak platí: } \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n(n+2)}{2(n+2)} = \frac{n(n+1-n-2)}{2(n+2)} = \frac{-n}{2(n+2)} = \frac{-1}{2+\frac{4}{n}}.$$

$$\text{Tedy } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2+\frac{4}{n}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{-1}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

Příklad 4 (a)

Využijeme vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0 \end{aligned}$$

Přičemž jsme použili, že $\sqrt{n} \rightarrow \infty$, $\sqrt{n+1} \rightarrow \infty$, což se dá snadno dokázat např. z definice.

Příklad 4 (b)

Vzorec: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n}) \frac{(\sqrt[3]{n+11})^2 + \sqrt[3]{(n+11)n} + (\sqrt[3]{n})^2}{(\sqrt[3]{n+11})^2 + \sqrt[3]{(n+11)n} + (\sqrt[3]{n})^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+11-n}{(\sqrt[3]{n+11})^2 + \sqrt[3]{(n+11)n} + (\sqrt[3]{n})^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11}{(\sqrt[3]{n+11})^2 + \sqrt[3]{(n+11)n} + (\sqrt[3]{n})^2} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0 \end{aligned}$$

Příklad 4 (c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \infty$$

Příklad 4 (d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2^2 + 2n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n \left(\frac{4}{n} + 2\right)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \sqrt{\frac{4}{n} + 2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{4}{n} + 2}}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0$$

Příklad 4 (e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{n}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0$$

Příklad 4 (f)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{(n+2)^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{(n+2)^2}} \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1-n}{\left(\sqrt{n^2-3} - \sqrt{(n+2)^2}\right) (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})} \frac{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{(n+2)^2}}{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{(n+2)^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\left(\sqrt{n^2-3} + \sqrt{(n+2)^2}\right)}{(n^2-3 - (n+2)^2) (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2+4n+4}}{(n^2-3 - n^2-4n-4) (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n \left(\sqrt{1 - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}}\right)}{n \left(-4 - \frac{7}{n}\right) (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{3}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}}}{\left(-4 - \frac{7}{n}\right) (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0 \end{aligned}$$

Příklad 4 (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

Dle věty o posl. s kladnými členy plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, neb $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.